11/12/2019

• ΣΥΓΚΛΙΣΗ Τ.Μ. ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Συμβολισμός: $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ θα δηλώνει μία ακολουθία Τ.Μ.

Χρησιμότητα:
Η σύγκλιση ή ασυμπτωτική συμπεριφορά των Τ.Μ είναι ένα σπουδαίο εργαλείο για την προσέγγιση άγνωστων αλλά και γνωστών κατανομών. Μας οδηγεί λοιπόν στον υπολογισμό προσεγγιστικά πιθανοτήτων.

• ΕΙΔΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ:

1) Σχεδόν Παντού (σ.π)
2) Κατά Πιθανότητα (κ.π)
3) Κατά Κατανομή (κ.κ)

• Σχεδόν Παντού:

$\{X_n\}$ συγκλίνει σχεδόν παντού ή με πιθανότητα 1 στην Τ.Μ. X συμβολίζεται $X_n \xrightarrow{\sigma.\pi} X$

αν $X_n(s) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(s)$, $\forall s \in S$, όπου S ο δειγματικός χώρος εκτός ίσως από ορισμένα s των οποίων η πιθανότητα είναι 1.

Ισοδυναμία:
$\forall \varepsilon > 0$ και $\forall s \in S$ $\exists N(\varepsilon, s)$ τ.ω $|X_n(s) - X(s)| < \varepsilon$, $\forall n \geq N(\varepsilon, s)$

• Κατά Πιθανότητα

ΟΡΙΣΜΟΣ:
$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\pi} X$ αν $\forall \varepsilon > 0$ $P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$

Αναγκαία Συνθήκη

$X_n \xrightarrow{\Pi} \mu$ όπου μ αριθμός (1)

αν $E(X_n) \to \mu$ $n \to \infty$ και $Var(X_n) \to 0$, $n \to \infty$ (2)

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Επίσης αν δεν ισχύει το (2) δεν ξέρω τι κάνει το (1).

Παράδειγμα 1

Έστω X_n ακολουθία τ.μ. τέτοια ώστε $P(X_n = n^2) = \frac{1}{n}$ $n \neq 0$

$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$.

ΝΔΟ $X_n \xrightarrow{\Pi} 0$

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιούμε τον ορισμό:

Θέλω $\forall \varepsilon > 0$ $P(|X_n - 0| > \varepsilon) \to 0$

Είναι $\forall \varepsilon > 0$ $P(|X_n| > \varepsilon) = P(X_n = n^2) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Παράδειγμα 2

$Y_n \sim B(n, p)$

ΝΔΟ $X_n = \frac{Y_n}{n} \xrightarrow{\Pi} p$

ΛΥΣΗ

$E(X_n) = E\left(\frac{Y_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E(Y_n) = \frac{1}{n} np = p$

$Var(X_n) = Var\left(\frac{Y_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var(Y_n) = \frac{1}{n^2} np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Άρα $X_n \xrightarrow{\Pi} p$

• Κατά κατανομή:

$X_n \xrightarrow[n \to \infty]{K} X$ αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

i) $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ στα οποία η $F_X(x)$ είναι συνεχής

ii) $m_{X_n}(t) = E(e^{tX_n}) \to m_X(t) = E(e^{tX})$, $t \in (-c, c)$

iii) $\phi_{X_n}(t) = E(e^{itX_n}) \to \phi_X(t) = E(e^{itX})$

$\downarrow$

Χαρακτηριστική Συνάρτηση

• **ΠΡΟΤΑΣΗ: (Slutsky - Frechet)**

1) Αν $X_n \xrightarrow{\Pi} X$ και $g(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε:

$$g(X_n) \xrightarrow{\Pi} g(X)$$

2) Αν $X_n \xrightarrow{K} X$ και $g(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε:

$$g(X_n) \xrightarrow{K} g(X)$$

3) Αν
$$\left.\begin{array}{l} X_n^{(1)} \xrightarrow{\Pi} X_1 \\ X_n^{(2)} \xrightarrow{\Pi} X_2 \\ \vdots \\ X_n^{(k)} \xrightarrow{\Pi} X_k \end{array}\right\} \text{ τότε } \Longleftrightarrow \ (X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(k)}) \xrightarrow{\Pi} (X_1, X_2, \dots, X_k)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στο κατά κατανομή όριο δεν ισχύει κάτι αντίστοιχο.

• **Σχέσεις Μεταξύ Ειδών Σύγκλισης**

Πρόταση:

Σχεδόν Παντού ⇒ κατά Πιθανότητα ⇒ κατά Κατανομή.

Δηλαδή Σ.Π ⇒ κ.Π ⇒ κ.Κ

Το προς τα πίσω δεν ισχύει (εκτός αν έχω αριθμό).

Άσκηση 5.5 Σελ 182

$X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. $\sim U(0,\Theta)$ $\Theta>1$.

$Y_n = \max X_i$

Νδο $Z_n = \sqrt[n]{Y_n} \xrightarrow{\Pi} \sqrt[n]{\Theta}$.

ΛΥΣΗ

Αρχικά πρέπει να προσδιορίσω την κατανομή του Y_n

$Y_n = \max X_i$

$F_{Y_n}(y) = P(\max X_i \leq y) = P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_n \leq y) \stackrel{\text{ανεξ.}}{=}$

$= P(X_1 \leq y)\, P(X_2 \leq y) \dots P(X_n \leq y) \stackrel{\text{ισον.}}{=} [P(X \leq y)]^n =$

$= [F_X(y)]^n$

Άρα: $f_{Y_n}(y) = n f_X(y) [F_X(y)]^{n-1}$

$f_X(x) = \frac{1}{\Theta}$, $0 < x < \Theta$, $\Theta > 1$

$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\Theta} dy = \frac{x}{\Theta}$, $0 < x < \Theta$

Άρα $f_{Y_n}(y) = n \left[\frac{y}{\Theta}\right]^{n-1} \frac{1}{\Theta} = \frac{n}{\Theta} \left[\frac{y}{\Theta}\right]^{n-1} = n \frac{y^{n-1}}{\Theta^n}$, $0 < y < \Theta$

$Z_n = \sqrt[n]{Y_n}$

$E(Z_n) = E(\sqrt[n]{Y_n}) = \int_0^\Theta \sqrt[n]{y_n} \cdot n \frac{y^{n-1}}{\Theta^n} dy = \frac{2n}{2n+1} \sqrt[n]{\Theta} \xrightarrow{n \to \infty} \sqrt[n]{\Theta}$

$Var(Z_n) = Var(\sqrt[n]{Y_n}) = E(\sqrt[n]{Y_n}^2) - [E(\sqrt[n]{Y_n})]^2 = \frac{n}{(n+1)(2n+1)^2} \Theta \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Άρα χρησιμοποιώ αναγκαία συνθήκη και έχω το ζητούμενο

Άσκηση 5.6 Σελ 182

X τ.μ. με σ.π.π. $f_X(x)$, $m_X(t)$, $\Phi_X(t)$

$X_n = X + \frac{c}{n}$ όπου c σταθερά

ΝΔΟ $X_n \xrightarrow{k} X$.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξω ότι:

$m_{X_n}(t) \longrightarrow m_X(t)$

$$m_{X_n}(t) \overset{OP}{=\!=} E(e^{tX_n}) = E(e^{t(X+\frac{c}{n})}) = E(e^{tX + t\frac{c}{n}}) = E(e^{tX} e^{t\frac{c}{n}}) =$$

$$= e^{t\frac{c}{n}} E(e^{tX}) = e^{t\frac{c}{n}} m_X(t) \xrightarrow{n\to\infty} e^0 m_X(t) = m_X(t)$$

Άσκηση 5.8 Σελ 182

Η $X_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.

ΝΔΟ: (i) $X_n \xrightarrow{\Pi} \mu$.

(ii) $X_n \xrightarrow{k} \mu$.

ΛΥΣΗ

i) $E(X_n) = \mu \xrightarrow{n\to\infty} \mu$

$Var(X_n) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Longrightarrow X_n \xrightarrow{\kappa.\Pi} \mu$

ii) Από γνωστή Πρόταση: (σχέση σημειώσεων)

$X_n \xrightarrow{\Pi} \mu \Longrightarrow X_n \xrightarrow{k} \mu$.

Άσκηση 5.9 Σελ 182

$X_n \sim Γάμμα(a=n, \theta)$ θ σταθερά

Να βρεθεί η κατανομή της X όταν: $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{k} X$.

ΛΥΣΗ

$$E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n}n\theta = \theta \xrightarrow{n\to\infty} \theta$$

$$Var\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(X_n) = \frac{1}{n^2}n\theta^2 = \frac{\theta^2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Άρα από αναγκαία συνθήκη:

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\tau.\pi} \theta \Longrightarrow \frac{X_n}{n} \xrightarrow{\tau.\kappa} \theta$$

X είναι η τ.μ με συνάρτηση πιθανότητας $P(X=\theta)=1$
δηλ η X παίρνει μόνο μία τιμή την θ

Άσκηση 5.10 Σελ 183

$X_n = n$ με πιθανότητα $\frac{1}{n}$, $n \neq 0$.
$X_n = 0$ με πιθανότητα $1-\frac{1}{n}$
ΝΔΟ $X_n \xrightarrow{\pi} 0$ και $X_n \xrightarrow{\kappa} 0$.

ΛΥΣΗ
$P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0 \Rightarrow P(|X_n| > \varepsilon) \to 0$
$P(X_n = n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Αφού $X_n \xrightarrow{\pi} 0$ τότε $X_n \xrightarrow{\kappa} 0$

Άσκηση 5.20 Σελ 184

Για την X_n ισχύουν:
$P(X_n = 1) = \frac{1}{2n} = P(X_n = -1)$
$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$

ΝΔΟ $X_n \xrightarrow{\kappa.\pi} 0$ και $X_n \xrightarrow{\tau.\kappa} 0$.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξω ότι: $P(|X_n| > \varepsilon) \to 0$, $\forall \varepsilon > 0$.

Είναι $P(|X_n| > \varepsilon) = P(X_n = 1) + P(X_n = -1) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Άρα $X_n \xrightarrow{\Pi} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{k} 0$

Άσκηση 5,22 Σελ 184

X τ.μ. $\{a_n\}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Αν $X_n = X + a_n$ νδο $X_n \xrightarrow{k} X$.

ΛΥΣΗ

1ος Τρόπος

$$m_{X_n}(t) = E(e^{tX_n}) = E(e^{t(X+a_n)}) = E(e^{tX} e^{ta_n}) =$$
$$= e^{ta_n} E(e^{tX}) = e^{ta_n} m_X(t) \xrightarrow{n\to\infty} e^{t \lim a_n} m_X(t) = m_X(t)$$

2ος Τρόπος

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x) = P(X + a_n \leq x) = P(X \leq x - a_n) \xrightarrow{n\to\infty}$$
$$\longrightarrow P(X \leq x) = F_X(x)$$

Άσκηση 5,16 Σελ 183

$X_n \xrightarrow{k} X$

Νδο $cX_n \xrightarrow{k} cX$, $c \neq 0$

$X_n + c \xrightarrow{k} X + c$.

ΛΥΣΗ

$$m_{cX_n}(t) = E(e^{t(cX_n)}) = E(e^{(ct)X_n}) = m_{X_n}(ct) \xrightarrow{(*)} m_X(ct) = E(e^{(ct)X})$$
$$= E(e^{t(cX)}) = m_{cX}(t)$$

(*) επειδή $X_n \xrightarrow{k} X$

άρα $m_{X_n} \to m_X$

$$m_{X_n+c}(t) = E\left(e^{t(X_n+c)}\right) = E\left(e^{tX_n} \cdot e^{tc}\right) = e^{tc} E\left(e^{tX_n}\right) = e^{tc} m_{X_n}(t)$$

$$\longrightarrow e^{tc} m_X(t) = e^{tc} E\left(e^{tX}\right) = E\left(e^{t(X+c)}\right) = m_{X+c}(t)$$

Άσκηση 4,9 Σελ 130

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 4e^{-2(x_1+x_2)} \quad , x_1>0 \ , x_2>0$$

$$U = X_1 + X_2 \qquad V = \frac{X_1}{X_2}$$

Να βρεθεί η κατανομή.

ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{array}{l} U = X_1 + X_2 \\ V = X_1/X_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X_1 = \frac{VU}{V+1} \\ X_2 = \frac{U}{V+1} \end{array}$$

"1-1" μετασχηματισμός.

$$S = \{(x_1,x_2) : x_1>0 \ , x_2>0\}$$

$$T = \left\{(u,v) : \frac{vu}{v+1} > 0 \ , \frac{u}{v+1} > 0 \ , u>0 \ , v>0\right\} = \{(u,v) : u>0 \ , v>0\}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{v}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \\ \frac{1}{v+1} & -\frac{u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = -\frac{vu}{(v+1)^3} - \frac{u}{(v+1)^3} = -\left[\frac{u(v+1)}{(v+1)^3}\right] = -\frac{u}{(v+1)^2}$$

Άρα έχουμε:

$$f_{U,V}(u,v) = f_{XY}\left(\frac{vu}{v+1}, \frac{u}{v+1}\right)|J| = 4e^{-2u}\frac{u}{(v+1)^2} \quad , (u,v) \in T$$

$$f_U(u) = \int_0^{+\infty} 4e^{-2u}\frac{u}{(v+1)^2}\,dv = 4ue^{-2u}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{1}{(v+1)^2}\,dv}_{=C}$$

το ολοκλήρωμα είναι σταθερό ως προς u.

$$= 4Cue^{-2u} = C4 \cdot u^{2-1} e^{-u/(1/2)} =$$

$$= \frac{u^{2-1} e^{-u/(1/2)}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Gamma(2)} \sim \Gamma\alpha\mu\mu\alpha(2, 1/2) \qquad u>0.$$

Άρα $C = \frac{1}{\Gamma(2)} = 1$

$$f_V(v) = \int_0^{+\infty} 4e^{-2u} \frac{u}{(v+1)^2}\,du = \frac{1}{(v+1)^2} \underbrace{\int_0^{+\infty} 4ue^{-2u}\,du}_{\text{σ.π.π της Γάμμα }(2, 1/2)} \rightarrow 1 =$$

$$= \frac{1}{(v+1)^2} \quad v>0.$$

<u>Άσκηση 4.13 Σελ 131</u>

$X \sim$ Βήτα (α, β) ανεξάρτητες.

$Y \sim$ Βήτα $(\alpha+\beta, \gamma)$

$U = XY$?

<u>ΛΥΣΗ</u>

Λόγω ανεξαρτησίας: $f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) =$

$$= \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \cdot \frac{y^{\alpha+\beta-1}(1-y)^{\gamma-1}}{B(\alpha+\beta,\gamma)}, \quad 0<x<1,\ 0<y<1$$

$$\left.\begin{array}{l} U = XY \\ W = Y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X = \frac{U}{W} \\ Y = W \end{array}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{w} & -\frac{u}{w^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{w}$$

Άρα:

$$f_{U,W}(u,w) = f_{XY}\left(\frac{u}{w}, w\right) |J| = \frac{u^{\alpha-1}(w-u)^{\beta-1}(1-w)^{\gamma-1}}{B(\alpha,\beta)B(\alpha+\beta,\gamma)} \qquad (u,w) \in T = \{0<u<w<1\}$$

$$f_U(u) = \frac{u^{\alpha-1}}{B(\alpha,\beta)B(\alpha+\beta,\gamma)} \int_u^1 (w-u)^{\beta-1}(1-w)^{\gamma-1}\,dw.$$

$$= \frac{u^{\alpha-1}}{B(\alpha,\beta)B(\alpha+\beta,\gamma)} \int_0^{1-u} t^{\beta-1}(1-(t+u))^{\gamma-1}\,dt$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta+\gamma-1}}{B(\alpha,\beta)B(\alpha+\beta,\gamma)}}}_{\text{σταθερό}} \underbrace{\int_0^1 z^{\beta-1}(1-z)^{\gamma-1}\,dz}_{\text{σταθερό ως προς } u.}$$

w	$w-u=t$
u	0

$dt = dw$

$z = \frac{t}{1-u} \Rightarrow t = z(1-u)$

$dt = (1-u)dz.$

$$= c_1 \cdot u^{a-1}(1-u)^{b+\gamma-1}$$

Βήτα $(a, b+\gamma) \longrightarrow \dfrac{u^{a-1}(1-u)^{b+\gamma-1}}{B(a, b+\gamma)}$

<u>Παρατήρηση:</u>

Αν δεν εφταναμε σε γνωστή κατανομή πως θα υπολογίζα τη σταθερα;

$\int$ σταθερα ... $= 1$.